



Проблемы логики и методологии науки

УДК 165.0+167.7+168.3
DOI 10.15372/PS20250101
EDN ITOJNE

Л.Д. Ламберов

КОНТЕКСТУАЛЬНОСТЬ, ОБОЗРИМОСТЬ, СТРОГОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА¹

В статье анализируются понятия обозримости и строгости математического доказательства. Показано, что обозримость и строгость можно рассматривать контекстуально. Эти понятия рассматриваются в контексте математической практики. На ряде примеров из истории математики раскрывается контекстуальный характер понятия строгости. Показано, что понятие строгости может рассматриваться аналогично понятию обозримости. Выделение мезоскопической обозримости позволяет говорить о возможном выделении, помимо глобальной и локальной строгости, промежуточного понятия строгости.

Ключевые слова: математическое доказательство; математическое знание; обозримость; строгость; математическая практика

L.D. Lamberov

CONTEXTUALITY, SURVEYABILITY, AND RIGOR OF MATHEMATICAL PROOF

The article analyzes the concepts of surveyability and rigor of mathematical proof. It is shown that surveyability and rigor can be considered contextually.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках Программы развития Уральского федерального университета им. первого Президента России Б.Н. Ельцина в соответствии с программой стратегического академического лидерства «Приоритет-2030».

These concepts are considered in the context of mathematical practice. Several examples from the history of mathematics reveal the contextual nature of the concept of rigor. It is shown that the concept of rigor can be considered similar to the concept of surveyability. Distinguishing of mesoscopic surveyability suggests the possible distinguishing of an intermediate concept of rigor in addition to global and local rigor.

Keywords: mathematical proof; mathematical knowledge; surveyability; rigor; mathematical practice

I

Контекстуальность можно рассмотреть в связи с понятием строгости математического доказательства². Традиционное понимание строгости [7; 12] связывается с отношением логического следования и предполагает, что строгим является такое доказательство, в котором заключение (теорема) логически вытекает из используемых аксиом и/или гипотез по правилам вывода. Такое понимание строгости можно назвать концепцией строгости как глобальной общезначимости [13]. Данное название четко отражает содержание указанной концепции. В частности, термин «глобальный» здесь обозначает универсальность этого понимания строгости, его повсеместную применимость, а термин «общезначимость» указывает на отношение логического следования. Как известно, в рамках формальной логики общезначимыми называются формулы, истинные при любой интерпретации, а вывод называется общезначимым, если между посылками вывода и его заключением имеет место отношение логического следования, которое традиционно понимается как отношение, имеющее место тогда и только тогда, когда невозможна такая интерпретация, при которой одновременно посылки истинны, а заключение ложно. Другими словами, называя некоторое доказательство общезначимым, мы предполагаем, что в случае, когда аксиомы и/или гипотезы, лежащие в основании данного доказательства, истинны, теорема (заключение доказательства) тоже истинна. То есть теорема логически следует из аксиом и/или гипотез по заранее определенным правилам вывода.

Это отношение может быть *непосредственно* проанализировано с помощью средств современной логики. Непосредственность ана-

² Подробнее о связи строгости и контекстуальности см.: [1].

лиза здесь означает, что процесс формализации некоторого данного результата некоторой данной неформальной математической теории и его формализованное представление в рамках соответствующей формализованной теории являются тривиальными.

Тем не менее такое понимание строгости не соответствует актуальной математической практике, в которой формализация [14] некоторых результатов не представляется тривиальным процессом и требует значительных интеллектуальных (а в некоторых случаях и вычислительных) усилий. В ряде разделов современной математики убедительность [4] доказательства и его строгость определяются не возможностью их непосредственного представления в виде логического вывода, а некоторыми другими факторами [3]. Эти факторы оказываются зависящими от контекста конкретной математической теории. В качестве примера можно указать на вырабатываемую при занятии теорией узлов [11] способность к «манипулятивному воображению» [10].

Математическая практика построения доказательств в теории узлов предполагает, что доказательство не является полным и готовым к тривиальной формализации, оно содержит пробелы, которые «заполняются» с помощью различных средств репрезентации (схемами, реализациями рассматриваемых математических объектов в виде физических конструкций и т.д.). Данные средства репрезентации существенным образом опираются на обычное пространственное воображение, присущее людям в силу их естественного развития в пространственной среде, и пространственные манипуляции с окружающими физическими предметами. Тем самым в рамках теории узлов и в ряде других сходных математических разделов актуализируется обыденный человеческий опыт. Однако в воображении можно представить очень многое, в том числе и то, что в окружающем физическом мире пока отсутствует либо и вовсе невозможно. Закономерно возникает вопрос об эпистемической связи между пространственным воображением в математических теориях и пространственным воображением того, что возможно с точки зрения законов природы и/или той или иной логики.

Рассматриваемая способность «манипулятивного воображения» применяется исследователем контекстуально и вырабатывается тоже контекстуально в процессе обучения и освоения теории узлов. При

этом процесс обучения не является обучением именно способности «манипулятивного воображения», а представляет собой обычный процесс обучения правилам, методам и принципам построения доказательств, ключевым результатам, базовым принципам и аксиомам, а также их квазифилософскому обоснованию. То есть эта способность вырабатывается путем особого рода математической тренировки и замещает в воображении манипуляции над формализованными конструкциями. Тем самым это не произвольные действия воображения, а действия, соответствующие наборам последовательных шагов, то, что представляет собой аналог «синтаксического сахара», но не в смысле сокращения определений или формул, а в смысле сокращения доказательств путем замены набора последовательных шагов на пространственные манипуляции, осуществляемые в воображении исследователя. Другими словами, способность к «манипулятивному воображению» подчинена строгим правилам, соответствует определенным наборам шагов и последовательностям в синтаксической манипуляции символами в формализованном доказательстве и предполагает определенные ограничения на осуществляемые операции над объектами в воображении.

Таким образом, указанная способность вырабатывается путем особого рода математической тренировки и замещает в воображении манипуляции над формализованными конструкциями, наборами синтаксических объектов. Такие манипуляции над объектами из теории узлов могут быть представлены в воображении как действия по оборачиванию веревок вокруг своего тела, завязыванию и развязыванию узлов, переплетению веревок и т.д. Доказательство при таком подходе представляет собой упорядоченный набор «рисунков», переход между которыми осуществляется в соответствии со строго определенным набором разрешенных эпистемических действий. Действия, составляющие такое «топологическое» доказательство, основываются на некоторой форме воображения, использующей уже имеющиеся когнитивные способности, связанные с манипуляцией над конкретными пространственно-временными объектами и усиленные специальными математическими знаниями.

При таком подходе доказательства оказываются контекстно зависимыми, так как они связываются со стандартами текущей математической практики. Конечно, такое доказательство можно представить

в формализованном виде, но это не может быть сделано *непосредственно*, поскольку для этого требуется найти формализованные аналогии для действий, осуществляемых в воображении, и это не является необходимым для убедительности доказательства [15], так как сообществу специалистов достаточно такого «неформального» доказательства, указывающего на то, какие действия «манипулятивного воображения» надо осуществить. Подобным же образом обстоят дела и в других разделах математики, где в качестве критериев строгости доказательства используются собственные и зависящие от контекста факторы. Другими словами, в рамках математической практики преждевременно связывать строгость доказательства с глобальной общезначимостью, следует обращать внимание на контекст, представляющий собой нормы и правила данного узкого математического сообщества, сообразованные с разрабатываемыми этим сообществом математическими теориями.

II

Указанная концепция строгости может быть названа концепцией строгости как локальной (в противоположность приведенной глобальной) общезначимости. Разведение глобальной общезначимости и локальной общезначимости предложено по аналогии с выделением Б. Бэсслером [6] глобальной обозримости и локальной обозримости. Первая связывается им с пониманием доказательства в целом, его структуры и общей идеи (концепция Дж. Локка о континуальности мышления), а вторая – с пониманием переходов между отдельными шагами доказательства (концепция Р. Декарта о выделении простых компонентов мышления), с интуитивным постижением применения правил вывода в каждом отдельном случае. Что же касается понятия строгости, то здесь глобальная общезначимость предполагает универсальные, общие критерии убедительности доказательства, определяемые отношением логического следования, а локальная общезначимость связывается с контекстуально зависимыми критериями, используемыми математическим сообществом в рамках отдельно взятого набора математических теорий. В последнем случае для убедительности не требуется сведения доказательства к цепочке элементарных шагов, «скрепленных», если говорить метафорически, отно-

нением логического вывода. Указанная концепция строгости как локальной общезначимости согласуется с позицией контекстуализма в эпистемологии, в соответствии с которой приписывание агенту знания определяется в том числе контекстом, а не только истинностью убеждения и наличием каких-либо факторов обоснования.

Концепция строгости как локальной общезначимости предполагает разговор о неформальных доказательствах, которые не могут быть непосредственно формализованы. Так как в неформальных доказательствах большую роль играет интуиция, она же (в форме, например, пространственной интуиции или «манипулятивного воображения») является существенной эпистемической частью локальной общезначимости. В математической практике редко используются формализованные доказательства, скорее лишь предполагается принципиальная формализуемость доказательных конструкций, неформальные доказательства неполны, содержат пробелы, а интуиция в ее различных формах служит целям «наглядного» заполнения этих пробелов.

Выше было указано, что в теории узлов способность к «манипулятивному воображению» основана на особых компетенциях, которые вырабатываются в процессе строгого обучения и индоктринации математиков, усвоения ими принципов и правил построения доказательств (в том числе формализованных), а в качестве базовой способности предполагает пространственное мышление и визуализацию. Традиционно понятие интуиции в рамках понятия математического доказательства связывается с пониманием, которое представляет собой необходимый компонент убедительности. Обширное формализованное доказательство может оказаться в меньшей степени понятным по сравнению с коротким и интуитивно ясным неформальным доказательством, тем самым убедительность первого состоит в доверии к формальной системе и агенту, построившему/проверившему доказательство (либо к собственной способности к построению и проверке такого доказательства), а второго – в доверии к собственной интуиции и пространственному воображению. Однако необходимо указать, что понятия глобальной и локальной обозримости могут быть дополнены понятием мезоскопической обозримости [2; 16], предполагающим строгую формализацию доказательства с сохранением его наглядности благодаря использованию специфических

для данной предметной области терминов. Мезоскопическая обозримость остается слабо исследованным понятием и требует своего подробного рассмотрения.

III

Может показаться [9], что в концепции строгости как локальной общезначимости слишком большую роль играет понятие интуиции и предполагается, что некоторые неформальные доказательства являются принципиально неформализуемыми. С точки зрения указанной критики строгость определяется исключительно формализуемостью, т.е. представлением доказательства в полном формализованном виде. Несомненно наличие формализованного доказательства является абсолютным условием для существования неформального доказательства. Другими словами, во всех случаях³, когда имеется формализованное доказательство, имеется либо соответствующее ему неформальное доказательство, либо возможность его построения. С точки зрения математической практики убедительность неформального доказательства зависит от аудитории: если аудитория обладает необходимыми для проверки способностями (и данное доказательство выдерживает такую проверку), то доказательство оказывается для нее убедительным, так как участники компетентного сообщества могут восстановить пропуски с помощью своей интуиции. Можно утверждать, что математики принимают доказательство не потому, что оно формализовано, скорее они принимают его по другим основаниям и затем делают вывод о принципиальной формализуемости доказательства. В принятии доказательства ключевую роль играет не критерий строгости, а критерий убедительности, который определяет, может ли доказательство быть опубликовано, представлено широкой аудитории при учете конкретного контекста.

В математической практике одну из основных ролей играет нормативность. Критерий убедительности определяет, какие именно упущения в неформальном доказательстве не являются существенными. Неформальное доказательство должно быть корректным, но не

³ О трудностях такого подхода см.: [17].

обязано быть строгим в смысле строгости как глобальной общезначимости. Некоторые исторические доказательства (например, доказательства Ньютона и Лейбница, предложенные ими для теории бесконечно малых, и даже соответствующие доказательства Коши и Вейерштрасса, доказательства итальянской школы алгебраической геометрии до работ О. Зариски [8]) по сегодняшним меркам не являются строгими, хотя в момент их обнародования они считались достаточно убедительными. Однако это не означает, что концепция строгости как локальной общезначимости представляет собой разновидность релятивизма [18], согласно которому корректность (соответственно, убедительность) доказательства определяется исключительно социальными факторами.

Безусловно, концепция строгости как локальной общезначимости предполагает, что сокращения доказательств благодаря обращению к интуиции в одном разделе математики не совпадают с таковыми в другом разделе. Иными словами, в разных разделах математики имеют место разные представления об убедительности. Точнее, убедительность в разных разделах математики определяется разными факторами. Обращение к разным системам репрезентации позволяет использовать в разных разделах математики разные когнитивные способности, разные формы интуиции. Тем не менее корректность доказательства остается фактическим вопросом. Контекст определяет не критерии корректности, а критерии убедительности. Между корректностью как формой строгости в концепции строгости как локальной общезначимости и убедительностью имеет место важного рода отношение, которое, однако, не является конститутивным, а проистекает скорее из общей надежности [5] человеческих математических способностей по построению и проверке доказательств, способностей, позволяющих следить за корректным доказательством. Другими словами, имеет место связь с рассмотренной выше обозримостью математического доказательства.

Разные разделы математики не только отличаются друг от друга (в том числе, как это было указано выше, по критериям убедительности), но и взаимодействуют друг с другом в разной степени (например, топология с абстрактной алгеброй, теория типов с лямбда-исчислением и т. д.). Последнее обогащает математическую практику и не

позволяет разным разделам математики кардинально отходить друг от друга. Кроме того, концепция строгости как локальной общезначимости не является радикальной разновидностью релятивизма в силу того, что та же упомянутая способность «манипулятивного воображения» возникает не на пустом месте, а имеет основания в обыденной практике и обучении посредством индоктринации и усвоения норм и правил математического сообщества, которые тренируются в том числе работой как с принятыми (считающимися убедительными) неформальными, так и с формализованными доказательствами.

IV

Таким образом, представляется обоснованным утверждать, что концепция строгости как локальной общезначимости тесно связывается с критериями убедительности, присущими разным разделам математики, однако ведет к умеренной форме релятивизма, к тезису о том, что критерии убедительности математического доказательства зависят от общих знаний и общих практик (общей «формы жизни», если использовать терминологию Л. Витгенштейна) математического сообщества, для которого предназначено данное доказательство. Вероятно, имеет смысл говорить о том, что неформальное доказательство, в котором существенную роль играет какая-либо форма интуиции, при его экспликации, анализе и строгой формализации становится новым доказательством, лишь идейно связанным с изначальным неформальным доказательством.

Строгость как локальная общезначимость и критерии убедительности неформального доказательства предполагают, что корректность доказательств может оцениваться без формализации, однако это не противоречит идее принципиальной формализуемости, а также тому, что формализация доказательства помогает разрешить разногласия, потенциально возникающие при эпистемическом различии агентов. Тем не менее указанные концепции свидетельствуют скорее о том, что формализация не является необходимым (и даже достаточным) условием понимания доказательства, а также того, как в математической практике могут возникать результаты, опирающиеся на доказательства, в которых важную роль играет интуиция.

Литература

1. *Бажанов В.А.* Доказательные рассуждения в математике: сочинение строгости? // Вестник Томского государственного университета. Сер.: Философия. Социология. Политология. 2024. № 81. С. 5–16.
2. *Родин А.В.* Аксиоматическая архитектура научных теорий: Дисс. ... д-ра филос. наук. СПб., 2020. URL: https://disser.spbu.ru/files/2020/disser_rodin.pdf (дата обращения: 01.10.2024).
3. *Родин А.В.* Делать и показывать // Доказательство: очевидность, достоверность и убедительность в математике / Под ред. В.А. Бажанова, А.Н. Кричевца и В.А. Шапошниковой. М.: Либроком, 2014. С. 219–255.
4. *Целищев В.В., Хлебалин А.В.* Концептуальная и формальная строгость математического доказательства // Философия науки. 2022. № 1 (92). С. 64–70.
5. *Avigad J.* Reliability of mathematical inference // *Synthese*. 2020. Vol. 198, No. 8. P. 7377–7399.
6. *Bassler O.B.* The surveyability of mathematical proof: A historical perspective // *Synthese*. 2006. Vol. 148, No. 1. P. 99–133.
7. *Burgess J., De Toffoli S.* What is mathematical rigor? APhEx: Portale Italiano di Philosophia Analytica. 2022. URL: <https://philpapers.org/archive/BURWIM-6.pdf> (дата обращения: 01.10.2024).
8. *De Toffoli S.* “Chasing” the diagram: The use of visualizations in algebraic reasoning // *The Review of Symbolic Logic*. 2017. Vol. 10, No. 1. P. 158–186.
9. *De Toffoli S.* Reconciling Rigor and Intuition // *Erkenntnis*. 2020. Vol. 86 (6). P. 1783–1802.
10. *De Toffoli S., Giardino V.* An inquiry into the practice of proving in low-dimensional topology // *From Logic to Practice: Italian Studies in the Philosophy of Mathematics* / Ed. by G. Lolli, M. Panza, G. Venturi. Cham: Springer, 2015. P. 315–336.
11. *De Toffoli S., Giardino V.* Envisioning transformations – The practice of topology // *Mathematical Cultures: The London Meetings 2012–2014* / Ed. by B. Larvor. Cham: Birkhäuser, 2016. P. 25–50.
12. *Hales T.C.* Formal proofs // *Notices of the American Mathematical Society*. 2008. Vol. 55, No. 11. P. 1370–1380.
13. *Hamami Y.* Mathematical rigor and proof // *The Review of Symbolic Logic*. 2022. Vol. 15, No. 2. P. 409–449.
14. *Leitgeb H.* On formal and informal provability // *New Waves in Philosophy of Mathematics* / Ed. by Ø. Linnebo, O. Bueno. London: Palgrave Macmillan, 2009. P. 263–299.
15. *Rav Y.* Why do we prove theorems? // *Philosophia Mathematica*. 1999. Vol. 7, No. 3. P. 5–41.
16. *Rodin A.* Formal proof-verification and mathematical intuition: the case of univalent foundations // *Book of Abstracts: 16th International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science and Technology* (Prague, August 5–10, 2019). 2019. P. 418.

17. *Tanswell F.* A problem with the dependence of informal proofs on formal proofs // *Philosophia Mathematica*. 2015. Vol. 23, No. 3. P. 295–310.
18. *Tatton-Brown O.* Rigor and intuition // *Erkenntnis*. 2021. Vol. 86. P. 1757–1781.

References

1. *Bazhanov, V.A.* (2024). Dokazatelnye rassuzhdeniya v matematike: sochinenie strogoti? [Proof in mathematics: making up rigor?]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Sotsiologiya. Politologiya* [Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science.], 81, 5–16.
2. *Rodin, A.V.* (2020). Aksiomaticheskaya arkhitektura nauchnykh teoriy [Axiomatic Architecture of Scientific Theories]. Thesis for the degree of Doctor of Philosophy. St. Petersburg. Available at: https://disser.spbu.ru/files/2020/disser_rodin.pdf (date of access: 01.10.2024).
3. *Rodin, A.V.* (2014). Delat i pokazivat [To do and to show]. In: V.A. Bazhanov, A.N. Krichevets & V.A. Shaposhnikov (Eds.). *Dokazatelstvo: ochevidnost, dostovernost i ubeditelnost v matematike: Trudy Moskovskogo seminara po filosofii matematiki* [Proof: Evidence, Credibility, and Cogency in Mathematics. Moscow Studies in the Philosophy of Mathematics]. Moscow, Librokom Publ., 219–255.
4. *Tselischhev, V.V. & A.V. Khlebalin.* (2022). Kontseptualnaya i formalnaya strogot matematicheskogo dokazatelstva [Conceptual and formal rigor of mathematical proof]. *Filosofiya nauki* [Philosophy of Science], 1 (92), 64–70.
5. *Avigad, J.* (2020). Reliability of mathematical inference. *Synthese*, Vol. 198, No. 8, 7377–7399.
6. *Bassler, O.B.* (2006). The surveyability of mathematical proof: A historical perspective. *Synthese*, Vol. 148, No. 1, 99–133.
7. *Burgess, J. & S. De Toffoli.* (2022). What is mathematical rigor? *APhEx: Portale Italiano di Philosophia Analytica*. Available at: <https://philpapers.org/archive/BURWIM-6.pdf> (date of access: 01.10.2024).
8. *De Toffoli, S.* (2017). “Chasing” the diagram: The use of visualizations in algebraic reasoning. *The Review of Symbolic Logic*, Vol. 10, No. 1, 158–186.
9. *De Toffoli, S.* (2020). Reconciling *Rigor and Intuition*. *Erkenntnis*, 86 (6), 1783–1802.
10. *De Toffoli, S. & V. Giardino.* (2015). An inquiry into the practice of proving in low-dimensional topology. In: G. Lolli, M. Panza & G. Venturi (Eds.). *From Logic to Practice: Italian Studies in the Philosophy of Mathematics*. Cham, Springer, 315–336.
11. *De Toffoli, S. & V. Giardino.* (2016). Envisioning transformations – The practice of topology. In: B. Larvor (Ed.). *Mathematical Cultures: The London Meetings 2012–2014*. Cham, Birkhäuser, 25–50.
12. *Hales, T.C.* (2008). Formal proofs. *Notices of the American Mathematical Society*, Vol. 55, No. 11, 1370–1380.
13. *Hamami, Y.* (2022). Mathematical rigor and proof. *The Review of Symbolic Logic*, Vol. 15, No. 2, 409–449.

14. *Leitgeb, H.* (2009). On formal and informal provability. In: Ø. Linnebo & O. Bueno (Eds.). *New Waves in Philosophy of Mathematics*. London, Palgrave Macmillan, 263–299.

15. *Rav, Y.* (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, Vol. 7, No. 3, 5–41.

16. *Rodin, A.* (2019). Formal proof-verification and mathematical intuition: the case of univalent foundations. In: *Book of Abstracts: 16th International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science and Technology* (Prague, August 5–10, 2019), 418.

17. *Tanswell, F.* (2015). A problem with the dependence of informal proofs on formal proofs. *Philosophia Mathematica*, Vol. 23, No. 3, 295–310.

18. *Tatton-Brown, O.* (2021). Rigor and intuition. *Erkenntnis*, 86, 1757–1781.

Информация об авторе

Ламберов Лев Дмитриевич – Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина (620002, Екатеринбург, просп. Ленина, 51)

lev.lamberov@urfu.ru

Information about the author

Lamberov, Lev Dmitrievich – Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin (51, Lenina Ave., Yekaterinburg, 620002, Russia).

lev.lamberov@urfu.ru

Дата поступления 15.11.2024